Méthodes mathématiques pour la physique
(contrôle continu du 27/02/2010)

Partie I (oscillateur harmonique)
Considérons l'équation de Schroedinger décrivant l'oscillateur harmonique en dimension 2:

$$(\hat{H} - E)\psi = 0,$$
$$\hat{H} = -\Delta + \rho^2 = -\partial_{xx} - \partial_{yy} + x^2 + y^2.$$

On peut écrire $\hat{H} = \hat{H}_x + \hat{H}_y$, avec

$$\hat{H}_x = \hat{p}_x^2 + \hat{x}^2, \qquad \hat{H}_y = \hat{p}_y^2 + \hat{y}^2,$$

où $\hat{p}_x = -i\partial_x$, $\hat{p}_y = -i\partial_y$.

1. En n'utilisant que les relations de commutation

$$[\hat{x}, \hat{p}_x] = [\hat{y}, \hat{p}_y] = i, \qquad [\hat{x}, \hat{y}] = [\hat{p}_x, \hat{p}_y] = [\hat{x}, \hat{p}_y] = [\hat{y}, \hat{p}_x] = 0, \tag{1}$$

   montrer que $[\hat{H}_x, \hat{H}_y] = 0$.

2. Montrer que $[\hat{H}, \hat{H}_x] = [\hat{H}, \hat{H}_y] = 0$.

3. Montrer que $\hat{H}$ commute avec l'opérateur du moment angulaire $\hat{L}_z = \hat{x}\hat{p}_y - \hat{y}\hat{p}_x$ (toujours en n'utilisant que les relations (1)).

4. Calculer le commutateur $2i\hat{K} = [\hat{H}_y, \hat{L}_z]$ (c'est-à-dire, exprimer $\hat{K}$ en fonction de $\hat{x}$, $\hat{y}$, $\hat{p}_x$, $\hat{p}_y$) et montrer que $2i\hat{K} = -[\hat{H}_x, \hat{L}_z]$.

5. Montrer que $[\hat{H}, \hat{K}] = 0$.

6. Exprimer les commutateurs $[\hat{H}_x, \hat{K}]$, $[\hat{H}_y, \hat{K}]$, $[\hat{L}_z, \hat{K}]$ en fonction de $\hat{H}_x$, $\hat{H}_y$, $\hat{L}_z$.

7. Que peut-on dire sur le spectre de $\hat{H}$ en utilisant l'existence des intégrales du mouvement supplémentaires $\hat{H}_x$, $\hat{H}_y$, $\hat{L}_z$, $\hat{K}$?

Partie II (analyse asymptotique d'un oscillateur anharmonique)
Décrire les comportements asymptotiques possibles de solutions de l'équation

$$\left(-\frac{d^2}{dx^2} + x^2 + gx^3 - E\right)\psi(x) = 0.$$

lorsque $x \to +\infty$ et $x \to -\infty$.

Partie III (harmoniques sphériques)
On s'intéresse aux fonctions propres communes des opérateurs $\hat{L}^2$ et $\hat{L}_z$ avec la valeur propre de $\hat{L}^2$ égale à 6.

1. Quelles sont les valeurs propres possibles de $\hat{L}_z$?

2. Donner la forme explicite de toutes ces fonctions.

Partie IV (opérateurs de création-annihilation)
Soient a, $a^\dagger$ deux opérateurs vérifiant la relation de commutation $[a, a^\dagger] = 1$. Notons

$$\hat{A} = \alpha a^2 + \beta a^\dagger a + \gamma (a^\dagger)^2, \qquad \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}.$$

Montrer que

$$e^{\hat{A}} a\, e^{-\hat{A}} = pa + qa^\dagger, \qquad e^{\hat{A}} a^\dagger\, e^{-\hat{A}} = ra + sa^\dagger,$$

avec $p, q, r, s \in \mathbb{C}$ et exprimer p, q, r, s en fonction de α, β, γ.